

Série

s

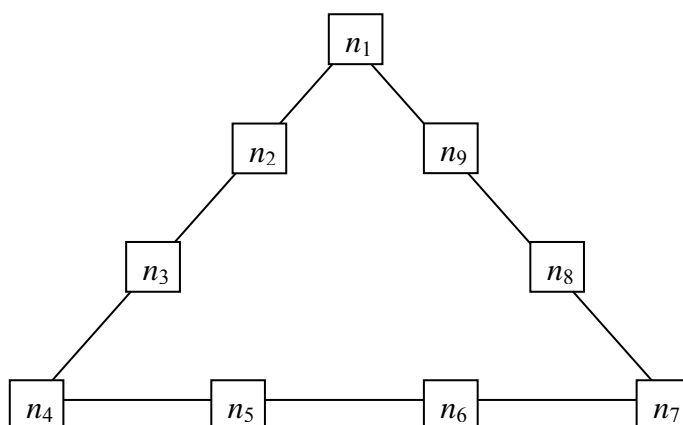
**Exercice 1****Partie A : Questions préliminaires :**

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

- 1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
- 2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

**Partie B : Les triangles magiques :**

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

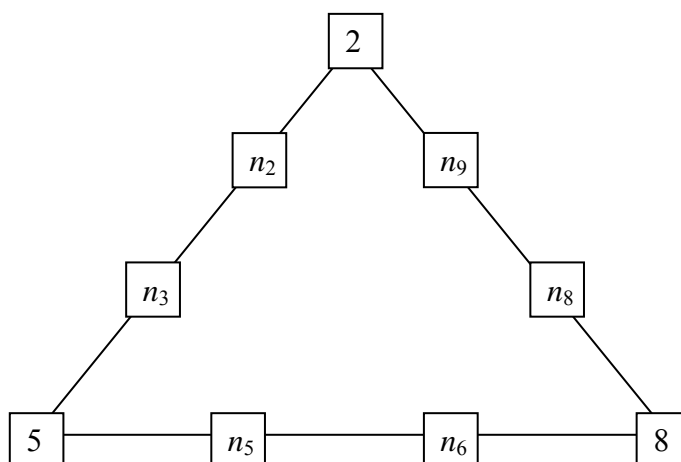


**Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur  $S$ , on dit que le triangle est  $S$ -magique.**

(C'est à dire si :  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$ )

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de  $S$ .

- 1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire  $S$ -magique de somme  $S = 20$ .



- 2- On considère un triangle  $S$ -magique et on appelle  $T$  la somme des nombres placés sur les trois sommets.
  - a. Prouver qu'on a  $45 + T = 3S$ .

- b. En déduire qu'on a  $17 \leq S \leq 23$
  - c. Donner la liste des couples  $(S, T)$  ainsi envisageables.
- 3- Proposer un triangle 17-magique.
- 4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
- 5- a. Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.  
b. Proposer un triangle 19-magique.
- 6- Prouver que, s'il existe un triangle  $S$ -magique, alors il existe aussi un triangle  $(40 - S)$ -magique.
- 7- Pour quelles valeurs de  $S$  existe-t-il au moins un triangle  $S$ -magique ?
- 

## **Exercice 2 :**

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

- 1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur  $L = 16$  et de largeur  $l = 8$ .

On pourra noter  $c$  la longueur du côté du losange.

***Les questions suivantes sont indépendantes.***

- 2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du côté du losange.
- 3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers. Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?
- 4- À partir d'une feuille de longueur  $L$ , on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ. Exprimer, en fonction de  $L$ , la largeur  $l$  de la feuille de départ.
- 5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

### Exercice 3 :

2009 Année étoilée!

**On s'intéresse aux nombres entiers non nul  $N$  possédant la propriété (\*) suivante :  $N$  peut s'écrire comme somme de deux entiers dont le produit est divisible par  $N$ , c'est-à-dire qu'il existe deux entiers  $a$  et  $b$  tels que**

$$N=a+b \text{ avec } a+b \text{ diviseur de } ab \quad (*)$$

**On appellera composantes de  $N$ , des entiers  $a$  et  $b$  convenables et on pourra dire  $N$  est étoilé.**

Exemple : 9 est étoilé car  $9 = 3 + 6$  et  $3 \times 6 = 18$  est divisible par 9 .

On dit que  $N$  nombre entier est un carré parfait s'il existe a nombre entier tel que  $a^2=N$ .

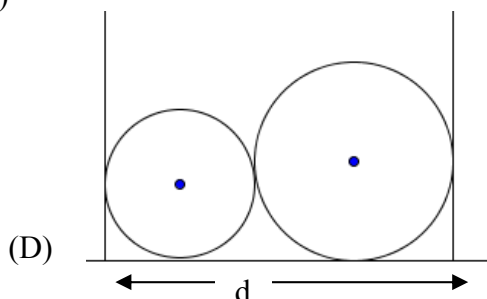
On dit qu'un nombre entier est premier s'il est plus grand que 1 et s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

- 1) Trouver tous les nombres entiers jusqu'à 20, qui sont étoilés et ceux qui ne le sont pas.
- 2) Montrer que 25 et 36 sont étoilés, puis montrer que si  $N$  est un carré parfait alors  $N$  est étoilé.
- 3) Soit  $N$  un entier étoilé et  $p$  un diviseur premier de  $N$  ( $p>1$ ) , montrer que  $p$  divise les deux composantes de  $N$ .
- 4) Montrer que 2009 est étoilé.
- 5) Montrer que si  $N = p \times q$  avec  $p$  et  $q$  premiers alors  $N$  n'est pas étoilé ; Que dire de 2010 ?
- 6) Soit  $N$  un nombre entier non nul, donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $N$  soit étoilé.

**Exercice 4 :**

Le rangement des balles et les ballons

1)



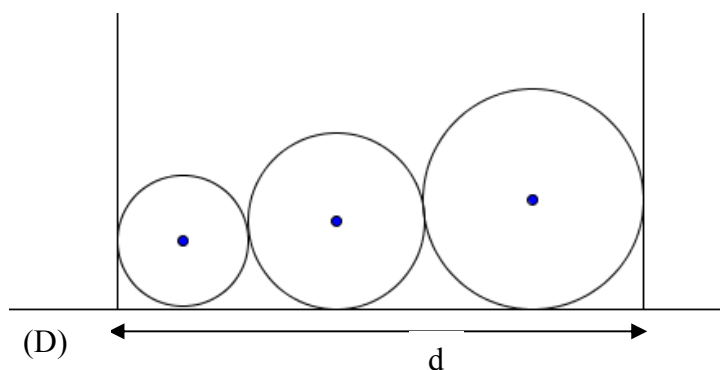
Deux ballons sont posés côte à côte comme le suggère le dessin ci-contre (les deux cercles sont tangents entre eux et à la droite (D)). L'un des ballons a pour rayon  $9\text{ cm}$ .

Si l'autre ballon a pour rayon  $4\text{ cm}$ , que vaut la distance  $d$  ?

Si la distance  $d = 30\text{ cm}$ , que vaut le rayon du deuxième ballon ?

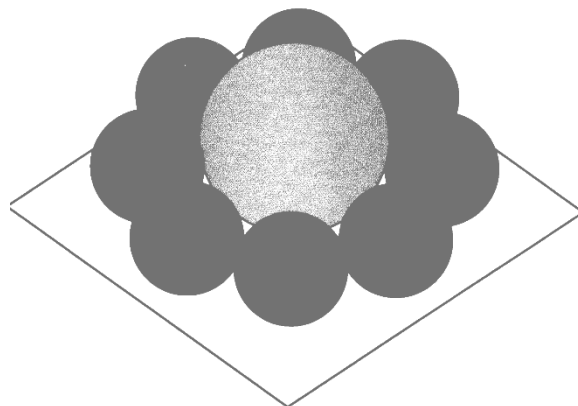
Mais, si la distance vaut  $18\text{ cm}$ , que vaut alors le rayon du deuxième ballon ?

2) Je veux ranger maintenant 3 ballons de rayons respectifs  $3\text{ cm}$ ,  $4\text{ cm}$  et  $5\text{ cm}$  disposés côte à côte comme précédemment, ( les 3 cercles tangents entre eux et tangents à une droite (D)). Dans quel ordre les disposer pour avoir la longueur  $d$  minimum ?



Si les ballons ont pour rayons respectifs  $r_1, r_2, r_3$ , peut-t-on généraliser le résultat obtenu ?

3) Toujours pour gagner de la place, j'ai disposé mes 8 balles de tennis autour d'un ballon de telle sorte que les 8 balles soient tangentes entre elles, tangentes au plan sur lequel elles sont posées et tangentes au ballon qui a  $4\text{ cm}$  de rayon. Quel est le rayon des balles de tennis ?



Séries

ES/L

## Exercice 1

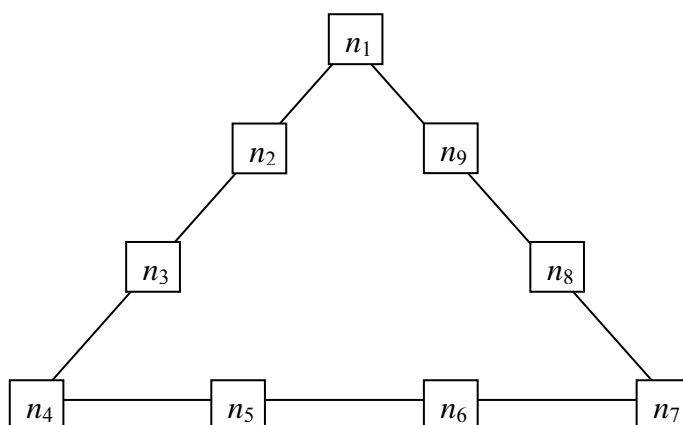
### Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

- 1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
- 2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

### Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

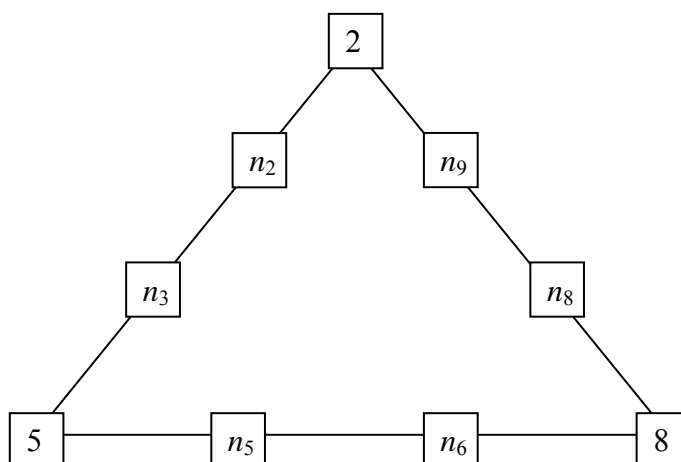


**Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur  $S$ , on dit que le triangle est  $S$ -magique.**

(C'est à dire si :  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$ )

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de  $S$ .

- 1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire  $S$ -magique de somme  $S = 20$ .



- 2- On considère un triangle  $S$ -magique et on appelle  $T$  la somme des nombres placés sur les trois sommets.
  - a. Prouver qu'on a  $45 + T = 3S$ .

- b. En déduire qu'on a  $17 \leq S \leq 23$   
c. Donner la liste des couples  $(S, T)$  ainsi envisageables.
- 3- Proposer un triangle 17-magique.
- 4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
- 5- a. Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.  
b. Proposer un triangle 19-magique.
- 6- Prouver que, s'il existe un triangle  $S$ -magique, alors il existe aussi un triangle  $(40 - S)$ -magique.
- 7- Pour quelles valeurs de  $S$  existe-t-il au moins un triangle  $S$ -magique ?
- 

## **Exercice 2 :**

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

- 1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur  $L = 16$  et de largeur  $l = 8$ .

On pourra noter  $c$  la longueur du côté du losange.

***Les questions suivantes sont indépendantes.***

- 2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du côté du losange.
- 3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers. Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?
- 4- À partir d'une feuille de longueur  $L$ , on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ. Exprimer, en fonction de  $L$ , la largeur  $l$  de la feuille de départ.
- 5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

**Exercice 3 :**

Le jeu.

Un supermarché propose un jeu pour fidéliser sa clientèle.

**On donne à chaque client une carte de 10 coupons, et un capital fictif de 1€**

A chaque passage en caisse, le client donne un coupon par tranche de 10€ d'achat, et voit son capital multiplié par le nombre de coupons donnés.



Ainsi, si son achat est de 30€, il donne 3 coupons et sa cagnotte est alors multipliée par 3.

Il pourra toucher son capital à la fin de sa carte.

- 1) Un client fait un premier achat de 100€, quel est le montant de son capital ?
- 2) Un autre client, chaque jour pendant 10 jours, fait un achat pour un montant de 10€, quel est au final le montant de son capital ?
- 3) Un troisième client fait un achat de 50€ suivi le lendemain, d'un autre achat de 50€, quel est le montant de son capital ?
- 4) Un client a fait plusieurs achats successifs pour un total de 100€, et il a un capital de 12€, quels sont les montants de ses achats successifs ?
- 5) Comment peut-on répartir ses achats pour avoir un capital le plus élevé possible ?
- 6) Voyant le succès du jeu, le supermarché décide d'éditionner des cartes de 20 coupons, mais il fait rapidement faillite ! Quel est le capital maximum pouvant être gagné par un client avec une carte de 20 coupons et un capital de départ de 1 € ?

**Exercice 4 :**

$ABCD$  est un carré de côté 4 cm et de centre  $O$ . Soit  $M$  un point qui décrit ce carré. On appelle « abscisse de  $M$  » la distance  $x$  (en cm) qu'a parcouru le point  $M$  à partir du point  $A$  lorsqu'il s'est déplacé sur le carré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

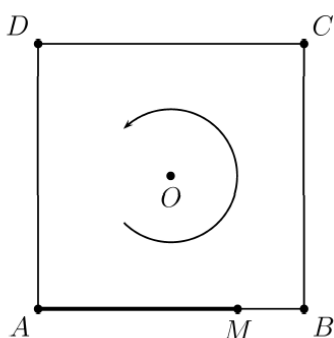


Figure 1

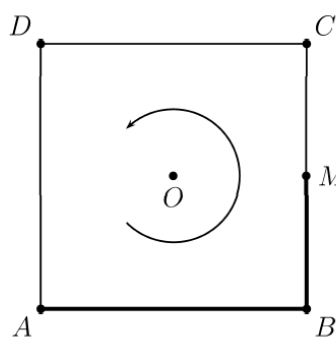


Figure 2

Ainsi, sur la figure 1, on a  $x = 3$  et, sur la figure 2, on a  $x = 4 + 2 = 6$ .

Question 1 : On note  $f(x)$  la distance entre le point  $O$  et le point  $M$ . exemple : lorsque le point  $M$  est sur  $A$  alors  $x=0$  et  $f(0) = OA$  soit puisque  $OA = \sqrt{2}$   $f(0) = \sqrt{2}$ . Représenter  $f$  sur le graphique 1 (voir annexe )

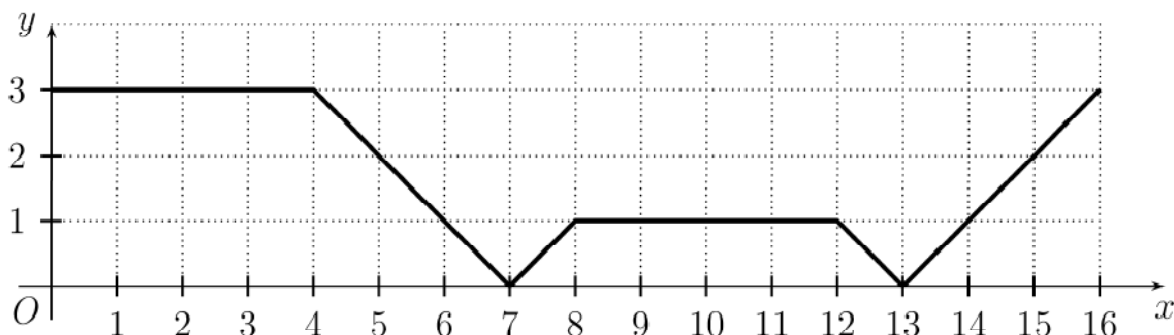
$P$  et  $Q$  sont deux points distincts situés à l'intérieur du carré  $ABCD$  ou sur la frontière de celui-ci. On note  $f(x)$  l'aire du triangle  $MPQ$ .

Question 2 : Dans cette question,  $P$  est le milieu de  $[OD]$  et  $Q$  le milieu de  $[OA]$ . Tracer le triangle  $MPQ$  sur la graphique 2 de l'annexe puis compléter la représentation graphique de  $f$  sur le graphique 3.

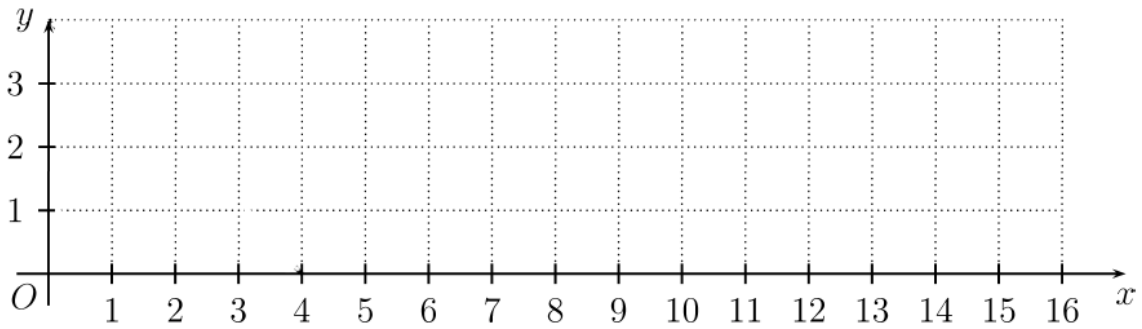
Question 3 : Dans cette question,  $P$  est le milieu de  $[OD]$  et  $Q$  le milieu de  $[OB]$ . Tracer le triangle  $MPQ$  sur la graphique 4 de l'annexe puis compléter la représentation graphique de  $f$  sur le graphique 5.

Question 4 : Dans cette question,  $P$  est le milieu de  $[OD]$  ,  $I$  est le milieu de  $[AB]$  et  $Q$  le milieu de  $[OI]$ .. Tracer le triangle  $MPQ$  sur la graphique 6 de l'annexe puis compléter la représentation graphique de  $f$  sur le graphique 7.

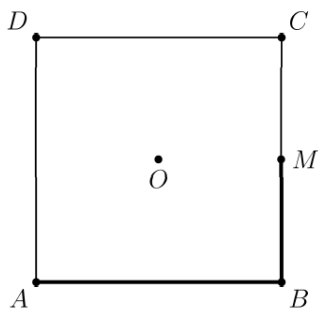
Question 5 : Dans cette question,  $P$  et  $Q$  sont des points à l'intérieur du carré. La représentation graphique de  $f$  est donnée ci-dessous. Déterminer avec précision les positions possibles de  $P$  et  $Q$



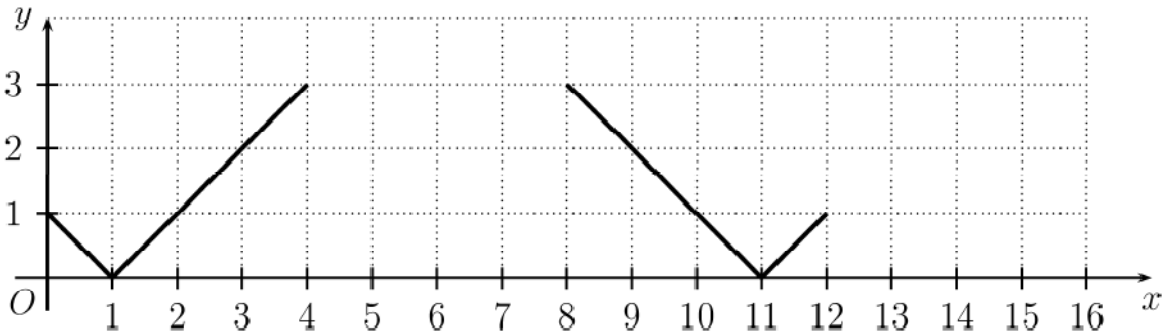
**Annexe : A RENDRE AVEC LA COPIE**



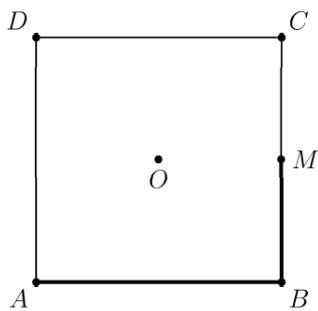
Graphique 1



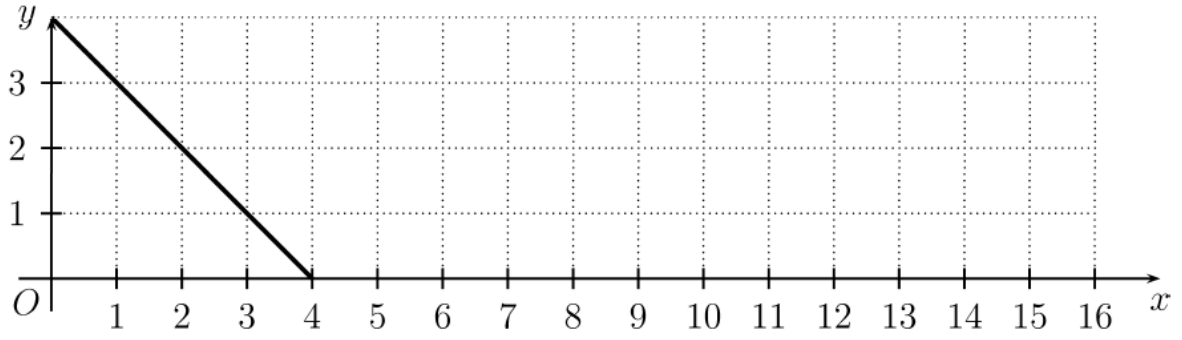
Graphique 2



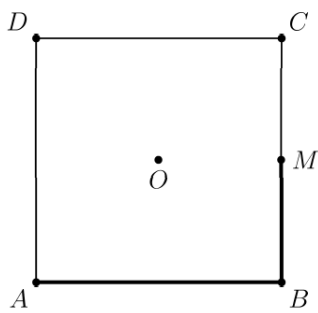
Graphique 3



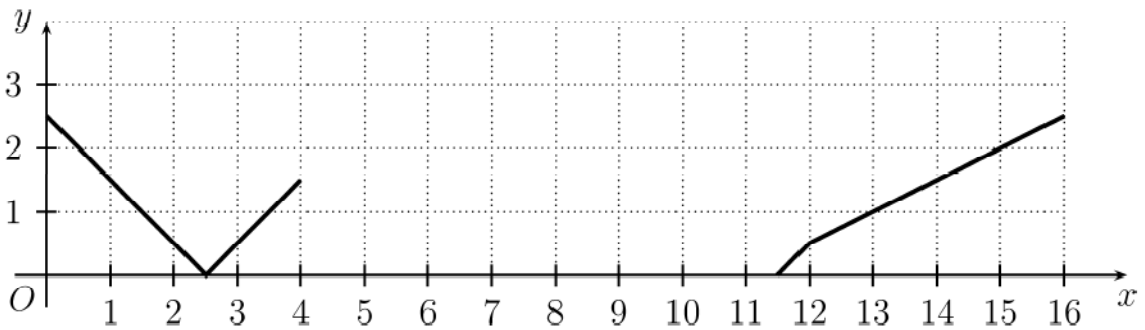
Graphique 4



Graphique 5



Graphique 6



Graphique 7