Olympiades académiques de mathématiques Académie de Nice

Sujet S

Mercredi 12 mars 2008

14 heures à 18 heures

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

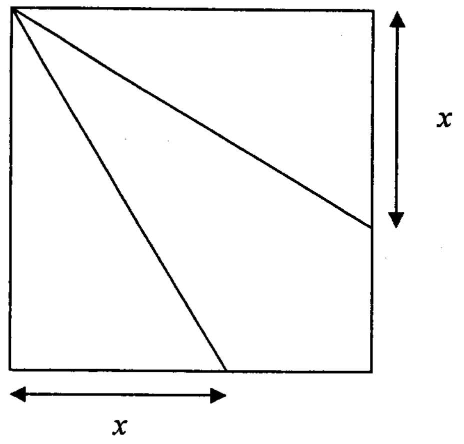
Ainsi, par exemple :

$2 = 1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant $1+1$).

$3 = 1+2$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2} \neq 1$; $3 = 1+1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1} \neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

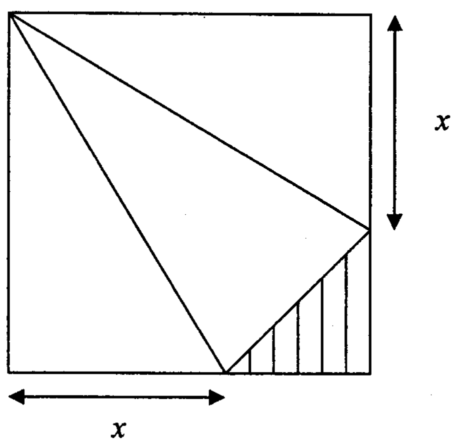
1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Un partage équitable



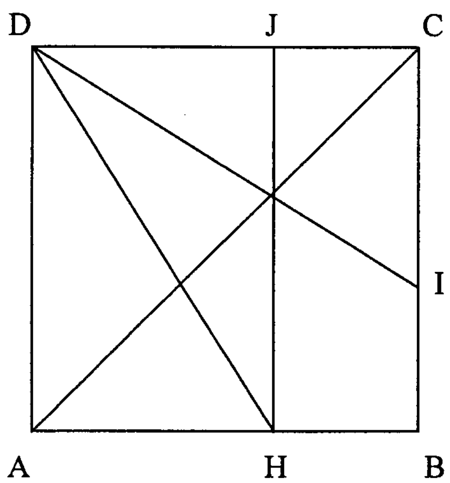
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?

ATTENTION

LIRE ATTENTIVEMENT LA REMARQUE CI-DESSOUS

Remarque concernant l'exercice « Des pliages version 3 »

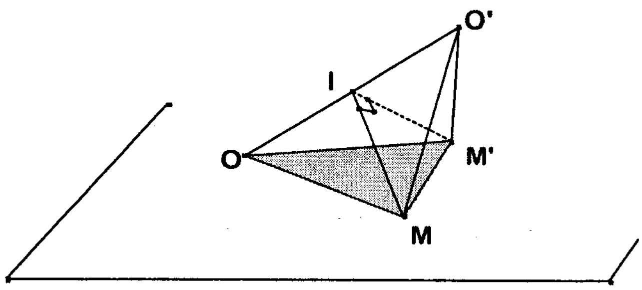
Dans la troisième partie, on n'étudiera l'aire maximale du polygone de sustentation que dans le cas ou

. zig-zag : les angles (MOM') et (OM'O') sont égaux

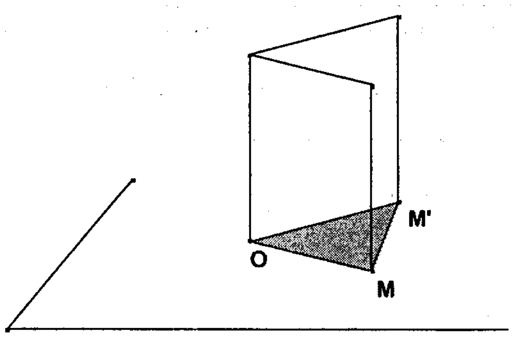
. trapèze : les angles (MOO') et (OO'M') sont égaux

Des pliages version 3 :

1) Marie plie une feuille de papier carrée de coté 30cm suivant une diagonale avec un angle d'ouverture de 90° et elle pose ce pliage sur une table et s'intéresse au triangle découpé sur la table qui s'appelle « le polygone de sustentation ».
(voir dessin : I est le milieu de [OO'] et l'angle $\widehat{MIM'}$ est droit et le polygone de sustentation est OMM')
.Quelle est l'aire du polygone de sustentation obtenu?



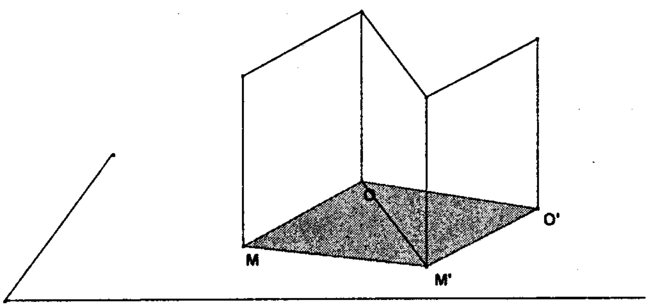
2) Marie plie maintenant cette feuille de papier suivant la médiatrice d'un coté. Elle la pose debout sur une table et s'intéresse au polygone de sustentation ». Sur la figure, le polygone de sustentation est le triangle MOM'
a) Quelle est l'aire du polygone de sustentation, si l'angle d'ouverture est 60° ?
b) Elle cherche « le polygone de sustentation » ayant l'aire la plus grande possible. Si on appelle α l'angle d'ouverture, déterminer l'aire de MOM' en fonction de α puis
déterminer α pour obtenir l'aire maximale, et donner l'aire obtenue.



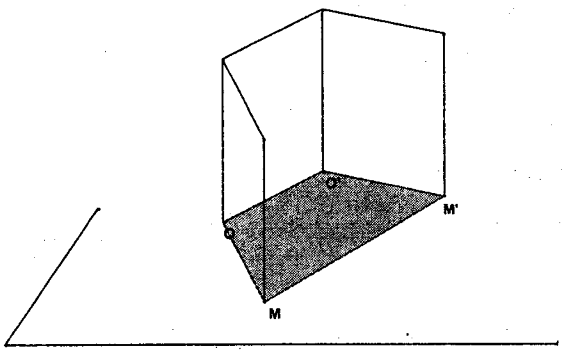
(on pourra travailler avec l'angle moitié $\frac{\alpha}{2}$, et on rappelle que $\sin 2x = 2\sin x \cos x$)

3) Marie plie à nouveau, cette feuille de papier carrée en trois parties de largeur égale.
Elle a deux possibilités de l'ouvrir debout :

En zigzags :



En trapèze :

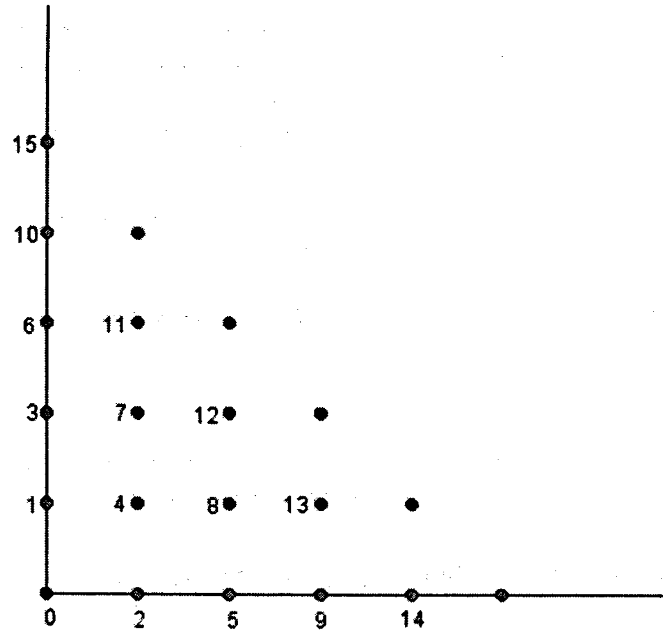


Déterminer, dans chaque cas, les angles d'ouverture pour lesquels le polygone de sustentation a l'aire maximale et déterminer l'aire obtenue.

Un comptage de points

On décide de numéroter les points du plan, à coordonnées entières, de la façon suivante :

au point (0 ; 0) on associe le nombre 0
au point (1 ; 0) on associe le nombre 1
au point (0 ; 1) on associe le nombre 2
au point (2 ; 0) on associe le nombre 3
au point (1 ; 1) on associe le nombre 4
etc……comme l'indique la figure ci-contre :



1) En continuant de cette façon :
   a) quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (3 ;4) ?
   b) quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (0; 50)
   c) puis au point de coordonnées (50 ; 0) ?

2) Si n un nombre entier naturel non nul :
   a) Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (0 ; n) ?
   b) Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (n ; 0) ?

3) Soit x et y deux entiers naturels tels que x+y = n, quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (x ;y)?

4) De façon générale, quel nombre associe-t-on au point de coordonnées(x, y) avec x et y entiers naturels non nuls ?

5) Réciproquement : à quelles coordonnées est associé le nombre 2008 ?

(On rappelle que pour n entier naturel, $1+2+3....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$)

Olympiades académiques de mathématiques Académie de Nice

Sujet L, STG, F11

Mercredi 12 mars 2008

14 heures à 18 heures

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.

On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

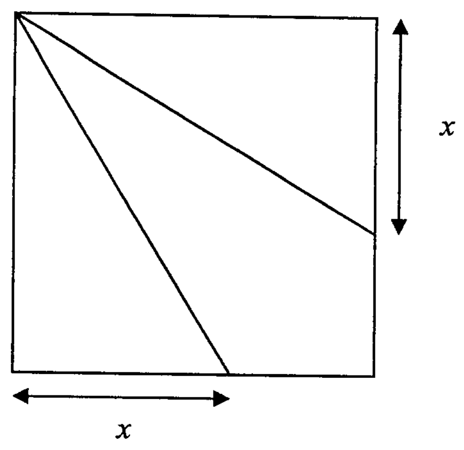
Ainsi, par exemple :

$2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant $1+1$).

$3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$; $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

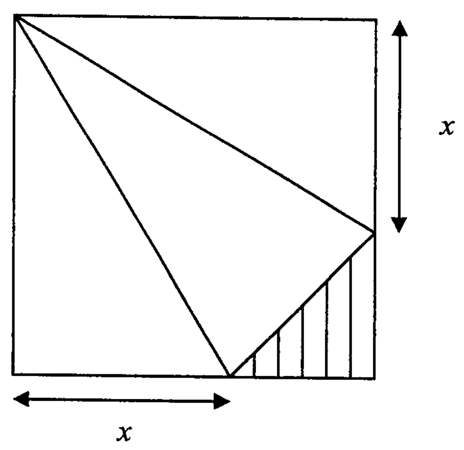
1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Un partage équitable



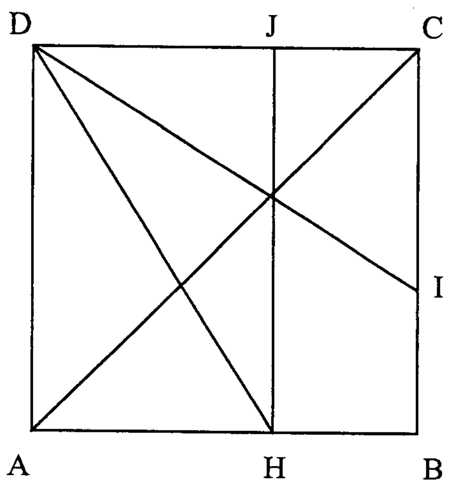
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).

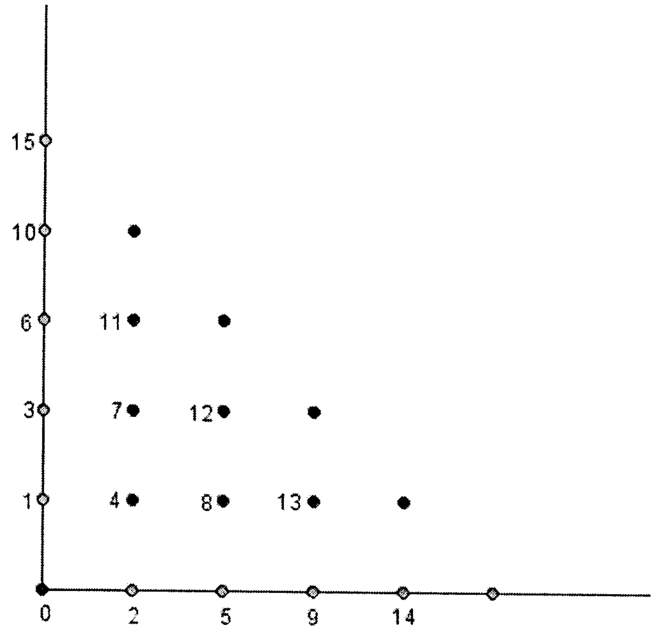
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?

Un comptage de points

On décide de numéroter les points du plan, à coordonnées entières, de la façon suivante :

au point (0 ; 0) on associe le nombre 0
au point (1 ; 0) on associe le nombre 1
au point (0 ; 1) on associe le nombre 2
au point (2 ; 0) on associe le nombre 3
au point (1 ; 1) on associe le nombre 4
etc……comme l'indique la figure ci-contre :



1) En continuant de cette façon :
   a) quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (3 ; 1) ?
   b) quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (3 ; 4) ?

2) Les axes de coordonnées :
   a) on s'intéresse à la suite des nombres obtenus en calculant la différence de deux nombres consécutifs de l'axe des abscisses (2-0 puis 5-2…) que pouvez-vous en dire ?
   b) quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (50 ; 0) ?
   c) existe-t-il un point de l'axe des abscisses qui soit associé au nombre 209 ?
   d) on s'intéresse à la suite des nombres obtenus en calculant la différence de deux nombres consé cutifs de l'axe des ordonnées (1-0 puis 3-1…) que pouvez-vous en dire ?
   e) quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (0 ; 50) ?
   f) existe-t-il un point de l'axe des ordonnées qui soit associé au nombre 210 ?

3) Une oblique :
   a) on s'intéresse à la demi-droite passant par les points de coordonnées (0,0) et (2,2). Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (20; 20) ?

   Généralisation :

4) Si n un nombre entier naturel non nul :
   a) Quel nombr e associe-t-on au point de coordonnées (0 ; n) ?

   b) Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (n ; 0) ?

   (On rappelle que pour n entier naturel, $1+2+3....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$)

5) A quel point est associé le nombre 2008 ?

Ce n'est pas gagné !

Je joue à pile ou face avec les règles suivantes :
Je commence avec une mise de a =1 € et je ne m'arrête de jouer que dans les deux cas suivants :

- si je n'ai plus d'argent, j'ai alors perdu

ou

- si j'ai b= 5 € et là j'ai gagné.

A) A chaque lancer : si j'ai un ou deux euros, je les mise, et si j'ai plus, je mise la différence à 5€ et :

- si j'obtiens face, je récupère le double de ma mise,
- si j'obtiens pile, je perds ma mise.

On appellera « avoir » la somme possédée après un lancer. On note (FPFF) la suite de résultat Face, Pile, Face, Face.

1) Je commence une partie avec (FP). Quel est mon avoir ?
2) Même question avec (FFPP).
3) Quel est le nombre minimum de lancers pour gagner ?
4) Au bout de 2008 lancers, je n'ai toujours pas gagné ni perdu, quel est mon avoir ?

B) On change les règles en prenant a = 1 € b = 9 € et A chaque lancer, si j'ai entre un et quatre euros, je les mise, et si j'ai plus, je mise la différence à 9 €.

1) Je commence une partie avec (FP). Quel est mon avoir ?
2) Donner une suite de résultat pour lequel l'avoir revient à 1 €
3) Au bout de 2008 lancers, je n'ai toujours pas gagné ni perdu, quel est mon avoir ?

C) J'arrive dans un lieu ou une partie de ce type est en train de se dérouler avec a = 1 € et b inconnu. Pendant ma présence, les avoir successifs du joueur sont 10, 20 et 5.

1) Combien vaut b?
2) A partir de ce moment (avoir de 5 euros) quels sont les avoirs possibles du joueur dans cette partie ?